

© International Baccalaureate Organization 2021

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2021

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Matemáticas: Análisis y Enfoques

### Nivel Superior

### Prueba 3

Martes 9 de noviembre de 2021 (mañana)

1 hora

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 25]

**En esta pregunta tendrá que explorar algunas de las propiedades de dos funciones especiales  $f$  y  $g$  y su relación con las funciones trigonométricas seno y coseno.**

Las funciones  $f$  y  $g$  se definen como  $f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  y  $g(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ , donde  $z \in \mathbb{C}$ .

Considere  $t$  y  $u$ , con  $t, u \in \mathbb{R}$ .

(a) Verifique que  $u = f(t)$  satisface la ecuación diferencial  $\frac{d^2u}{dt^2} = u$ . [2]

(b) Muestre que  $(f(t))^2 + (g(t))^2 = f(2t)$ . [3]

(c) Utilizando  $e^{iu} = \cos u + i \operatorname{sen} u$ , halle una expresión en función de  $\operatorname{sen} u$  y  $\cos u$  para:

(i)  $f(iu)$  [3]

(ii)  $g(iu)$  [2]

(d) A partir de lo anterior, halle y simplifique una expresión para  $(f(iu))^2 + (g(iu))^2$ . [2]

(e) Muestre que  $(f(t))^2 - (g(t))^2 = (f(iu))^2 - (g(iu))^2$ . [4]

Las funciones  $\cos x$  y  $\operatorname{sen} x$  se denominan funciones circulares, ya que las coordenadas generales  $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$  definen puntos pertenecientes al círculo de radio unidad, cuya ecuación es  $x^2 + y^2 = 1$ .

Las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se denominan funciones hiperbólicas, ya que las coordenadas generales  $(f(\theta), g(\theta))$  definen puntos pertenecientes a una curva denominada hipérbola, cuya ecuación es  $x^2 - y^2 = 1$ . Esta hipérbola tiene dos asíntotas.

(f) Dibuje aproximadamente el gráfico de  $x^2 - y^2 = 1$ , indicando las coordenadas de todas las intersecciones con los ejes que haya y la ecuación de cada una de las asíntotas. [4]

La hipérbola que tiene por ecuación  $x^2 - y^2 = 1$  se puede rotar hasta hacerla coincidir con la curva que viene dada por  $xy = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

(g) Halle los posibles valores de  $k$ . [5]

2. [Puntuación máxima: 30]

**En esta pregunta tendrá que explorar las estrategias necesarias para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.**

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x - y \text{ y } \frac{dy}{dt} = ax + y,$$

donde  $x, y, t \in \mathbb{R}^+$  y  $a$  es un parámetro.

Considere primero el caso en el que  $a = 0$ .

- (a) (i) Resolviendo la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dt} = y$ , muestre que  $y = Ae^t$ , donde  $A$  es una constante. [3]
- (ii) Muestre que  $\frac{dx}{dt} - x = -Ae^t$ . [1]
- (iii) Resuelva la ecuación diferencial del subpartado (a)(ii) para hallar  $x$  en función de  $t$ . [4]

Considere ahora el caso en el que  $a = -1$ .

- (b) (i) Derivando  $\frac{dy}{dt} = -x + y$  con respecto a  $t$ , muestre que  $\frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dy}{dt}$ . [3]
- (ii) Realizando la sustitución  $Y = \frac{dy}{dt}$ , muestre que  $Y = Be^{2t}$ , donde  $B$  es una constante. [3]
- (iii) A partir de lo anterior, halle  $y$  en función de  $t$ . [2]
- (iv) A partir de lo anterior, muestre que  $x = -\frac{B}{2}e^{2t} + C$ , donde  $C$  es una constante. [3]

Considere ahora el caso en el que  $a = -4$ .

- (c) (i) Muestre que  $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$ . [3]
- A partir de los casos anteriores, podríamos conjeturar que una solución de esta ecuación diferencial es  $y = Fe^{\lambda t}$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $F$  es una constante.
- (ii) Halle los dos valores de  $\lambda$  que satisfacen la relación  $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0$ . [4]
- Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  los dos valores que ha hallado en el subpartado (c)(ii).
- (iii) Verifique que  $y = Fe^{\lambda_1 t} + Ge^{\lambda_2 t}$  es una solución de la ecuación diferencial del subpartado (c)(i), donde  $G$  es una constante. [4]

Fuentes:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2021